مساحة الأشكال المستوية

1) مساحة مربع أو مستطيل = الطول × العرض

2) مساحة متوازي أضلاع = القاعدة × الارتفاع (ارتفاعه هو العمود على قاعدتيه)

3) مساحة معين = نصف جداء قطريه = مربع طول ضلعه × sin إحدى زواياه (قطريه متعامدين ومتناصفين)

4) مساحة شبه منحرف = نصف مجموع قاعدتيه × ارتفاعه (ارتفاعه هو العمود على قاعدتيه)

5) مساحة مسدس منتظم ($\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$) حيث : a (طول ضلعه) = نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه .

6) مساحة دائرة (πr^2) , محيط دائرة ($2\pi r$) حيث : r نصف قطرها .

7) مساحة قطاع دائري ($\frac{1}{2}\ell r = \frac{1}{2}r^2\theta$) : ℓ - طول القوس , (θ) – زاوية القطاع (راديان)

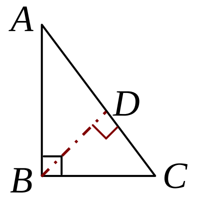
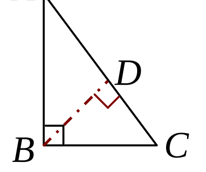
8) مساحة مثلث : تحسب من دساتير مساحة سطح مثلث (من المثلثات) .

حالة خاصة : مساحة مثلث متساوي الأضلاع ($S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$) حيث a – طول ضلعه .

(محيط أي مضلع = مجموع أطوال أضلاعه)

نظريات

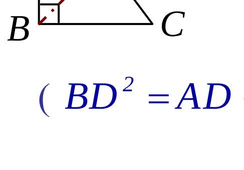
1) نظريات في المثلث القائم :

* فيثاغورث : مربع الوتر = مجموع مربعي الضلعين القائمين . ($AC^2 = AB^2 + BC^2$)

* مربع ضلع قائم = الوتر × مسقط الضلع على الوتر . ($AB^2 = AC \cdot AD$)

* جداء الضلعين القائمين = الوتر × الارتفاع النازل عليه . ($AB \cdot BC = AC \cdot BD$)



* مربع الارتفاع النازل على الوتر = جداء طولي القطعتين اللتين يحددهما على الوتر . ($BD^2 = AD \cdot CD$)

2) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالثة وتساوي نصفها .

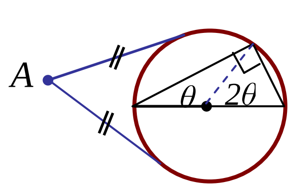
3) المنصف الداخلي في مثلث يقسم الضلع المقابلة لقطعتين نسبتهما منسجمة بالتجاور مع نسبة الضلعين الباقيين .



4) المتوسط يقسم المثلث لمثلثين متساويين بالمساحة .

5) المتوسط على وتر مثلث قائم = نصف طول الوتر .

6) المتوسطين في مثلثين طبوقين متساويين . (وتنطبق على حالة الارتفاعين والمنصفين)



7) المماسين المرسومين لدائرة من نقطة خارجها متساويين .

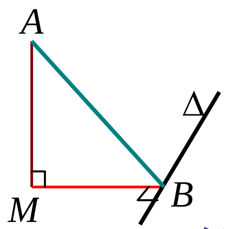
8) الزاوية المحيطية التي تحصر قطر في دائرة قائمة .

9) الزاوية المركزية = ضعفي المحيطية المشتركة معها .



10) مساحة المرتسم القائم لمضلع على مستو = ($S \cdot \cos\theta$) حيث : S مساحة المضلع, θ الزاوية الثنائية بين مستويهما

11) المسقط القائم لقطاع زاوي قائم على مستوٍ أحد ضلعيه يوازي المستوي هو قطاع زاوي قائم .

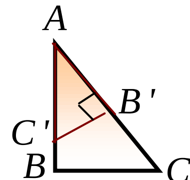
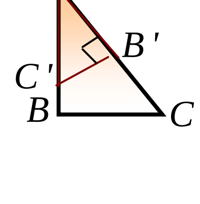


12) نظرية الأعمدة الثلاثة : $(AM \perp MB \quad , \quad MB \perp \Delta) \Rightarrow AB \perp \Delta$

بشكل آخر : (M مرتسم A على MB , B مرتسم M على Δ) $\Leftarrow$ B مرتسم A على Δ

13) العمود على مستوٍ يكون عمود على مستقيمين متقاطعين في المستوي .

14) مجموعة نقط الفراغ المتساوية البعد عن ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة هي محور لتلك النقاط .

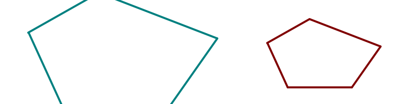



معلومات

1) نسب تشابه مثلثين : $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{AC}{AC'} = \dfrac{BC}{B'C'} = K$ حيث : K – نسبة التشابه .

2) المضلعان المتشابهان : أضلاعهما المتقابلة أطوالها متناسبة , وزواياهما المتقابلة متساوية .


* نسبة محيطي مضلعين متشابهين = نسبة التشابه .

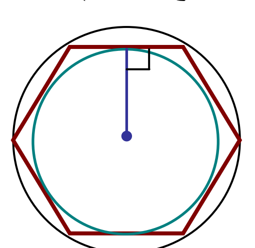


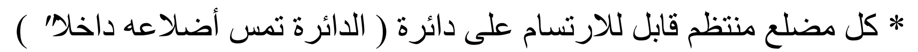
* نسبة مساحتي مضلعين متشابهين = مربع نسبة التشابه .

3) المضلع المنتظم :

* تعريفه : هو مضلع أضلاعه متساوية وزواياه متساوية (مثل : المثلث المتساوي الأضلاع , المربع , ...)

* كل مضلع منتظم قابل للارتسام في دائرة (الدائرة تمر بروؤسه)




* كل مضلع منتظم قابل للارتسام على دائرة (الدائرة تمس أضلاعه داخلاً)


* مركز المضلع المنتظم : هو مركز الدائرة المارة بروؤسه أو المماسة لأضلاعه داخلاً .

* عامد المضلع المنتظم : هو العمود المرسوم من مركز المضلع على أحد أضلاعه .


4) الرباعي الدائري : هو رباعي فيه مجموع زاويتين متقابلتين = $180°$

5) المماس لدائرة يكون عمودي على نصف قطرها .


6) بعد نقطة عن مستوٍ = طول العمود من النقطة على المستوي .


7) زاوية مستقيم مع مستوٍ : هي الزاوية الحادة بين المستقيم ومرتسمه القائم في المستوي .

8) محور تناظر مضلع : هو العمود على مستويه من مركز الدائرة المارة بروؤسه .

9) محور قطعة مستقيمة : هو العمود عليها من منتصفها .

10) مركز الدائرة المارة برؤوس مثلث : هي نقطة تلاقي محوري ضلعين منه .

حالات خاصة : 1- مركز الدائرة المارة بروؤس مثلث قائم : هي منتصف وتره .

2- مركز الدائرة المارة بروؤس مثلث متساوي الأضلاع هي نقطة تقاطع ارتفاعاته (R = ثلثي الارتفاع)

11) إذا اشترك مستويان بنقطة فإن فصلهما المشترك : هو مستقيم يمر بالنقطة ويوازي مستقيمين متوازيين فيهما .

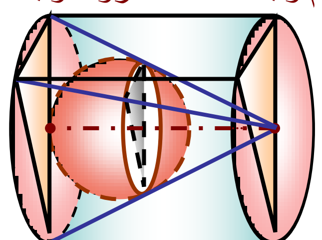
12) الزاوية الثنائية بين مستويين : هي الزاوية الحادة بين العمودين على الفصل المشترك أو بين العمودين عليهما .

13) لبرهان أن رباعي هو شبه منحرف نبرهن أن : فيه ضلعين متوازيين ومختلفين بالطول (هما قاعدتيه) .

14) لبرهان أن رباعي هو معين نبرهن أنه : متوازي أضلاع تساوت أطوال أضلاعه . (أو تعامد قطريه)

مساحــة وحجــوم المجسمــات المألوفــة

(الموشور – الاسطوانة – الهرم وجذعه – المخروط وجذعه – الكرة والقبة الكروية)



- الدستور الأساسي في الحجوم (أوجده العالم الانكليزي توماس سمبسون) : $V = \frac{1}{6} h (S + 4S_m + S')$

S , S' : مساحتا قاعدتيه , S_m : مساحة قاعدته الوسطى , h : ارتفاعه وهو البعد بين قاعدتيه .

القاعدة الوسطى : هي مقطع المجسم بمستوٍ يمر من منتصف ارتفاعه ويوازي قاعدته .

- المساحة الجانبية لأي مجسم (في الحالة العامة) = مجموع مساحات الأوجه الجانبية .

- المساحة الكلية لأي مجسم = مساحته الجانبية + مساحة القاعدات .

	المساحة الجانبية	الحجم
الموشور	محيط القاعدة × الارتفاع $S_\ell = p \cdot h$	مساحة القاعدة × الارتفاع $V = S \cdot h$
الاسطوانة	محيط القاعدة × الارتفاع $S_\ell = 2\pi R \cdot h$	مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \pi R^2 \cdot h$
الهرم (المساحة للمنتظم)	نصف محيط القاعدة × عامده $S_\ell = \frac{1}{2}(n \cdot a) \cdot L$	ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \frac{1}{3} h \cdot S$
جذع هرم (المساحة للمنتظم)	نصف محيطي القاعدتين × عامده $S_\ell = \frac{1}{2}(n \cdot a + n \cdot a') \cdot L$	$V = \frac{1}{3} h \left(S + S' + \sqrt{S \cdot S'}\right)$
المخروط	نصف محيط القاعدة × مولده $S_\ell = \pi R \cdot L$	ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \frac{\pi}{3} R^2 \cdot h$
جذع مخروط	نصف محيطي القاعدتين × مولده $S_\ell = \pi (R + r) \cdot L$	$V = \frac{\pi}{3} h \left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$
الكرة	مساحة سطحها : $S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi}{3} R^3$
قبة كروية R نصف قطر كرتها	مساحة سطحها : $S = 2\pi R \cdot h$	$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$
منطقة كروية	مساحة سطحها : $S = 2\pi R \cdot h$	حجم الكرة - حجمي قبتين

- الهرم المنتظم : قاعدته مضلع منتظم ورأسه يقع على محور القاعدة العمودي على مستويها (طول المحور = ارتفاعه)

علاقات وقضايا

1) مساحة المكعب : $S_T = 6a^2$ وحجمه : $V = a^3$ حيث : a طول حرفه , (طول قطر المكعب = $a\sqrt{3}$)

2) حجم متوازي مستطيلات أبعاده (x , y , z) يساوي جداء أبعاده الثلاثة أي : $V = x \cdot y \cdot z$

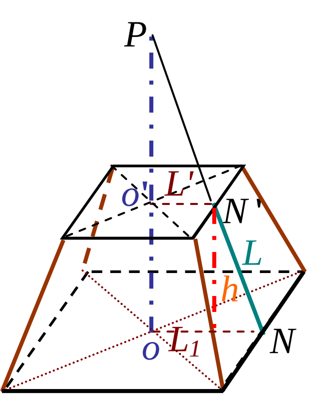
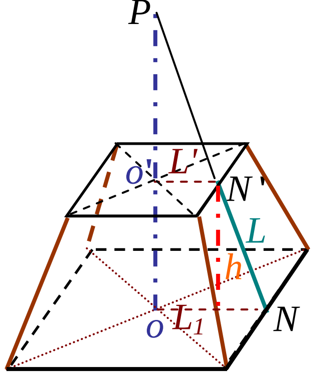
3) مساحة القاعدة الوسطى لهرم تساوي ربع مساحة قاعدة الهرم : $S_m = \frac{1}{4} S$

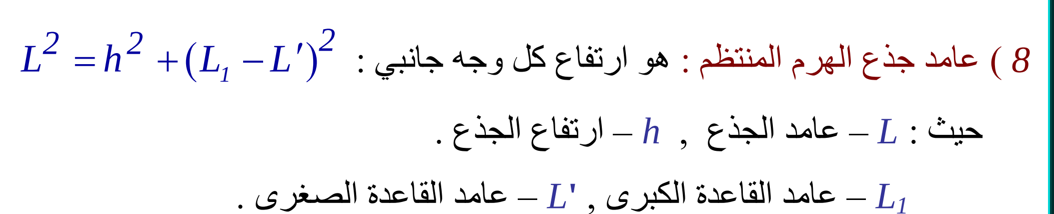
4) في جذع الهرم الجذر التربيعي الموجب للعدد الدال على مساحة القاعدة الوسطى وسط حسابي بين الجذرين التربيعيين الموجبين للعددين الدالين على مساحتي القاعدتين $\sqrt{S_m} = \frac{\sqrt{S} + \sqrt{S'}}{2}$

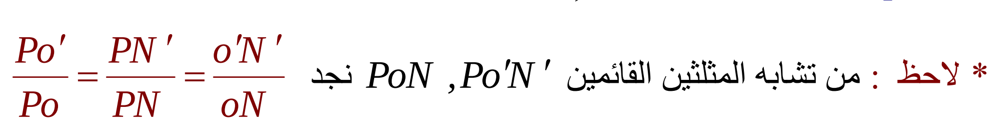
5) نعتمد الدستور : $r = \frac{3V}{S_T}$ لحساب نصف قطر كرة تمس داخلا" الأوجه الجانبية لهرم (أو مخروط) وقاعدته .
حيث : V - حجم الهرم (أو المخروط) , S_T - المساحة الكلية للهرم (أو المخروط) .

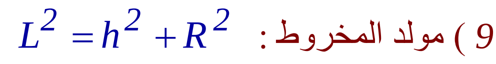
6) مركز الكرة المارة برؤوس هرم هي نقطة تقاطع محور القاعدة مع المستوي المحوري لأحد أحرف الهرم .

7) عامد الهرم المنتظم : هو ارتفاع كل وجه جانبي ويكون : $L^2 = h^2 + L_1^2$
حيث : L – عامد الهرم , L_1 – عامد قاعدة الهرم المنتظم , h – ارتفاع الهرم .

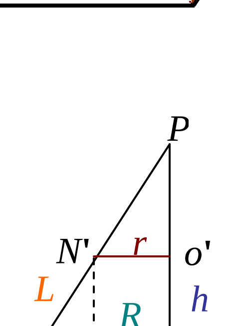



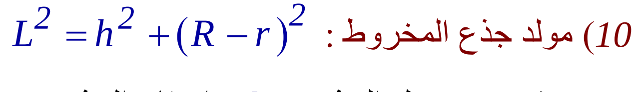

8) عامد جذع الهرم المنتظم : هو ارتفاع كل وجه جانبي : $L^2 = h^2 + (L_1 - L')^2$
حيث : L – عامد الجذع , h – ارتفاع الجذع .
L_1 – عامد القاعدة الكبرى , L' – عامد القاعدة الصغرى .

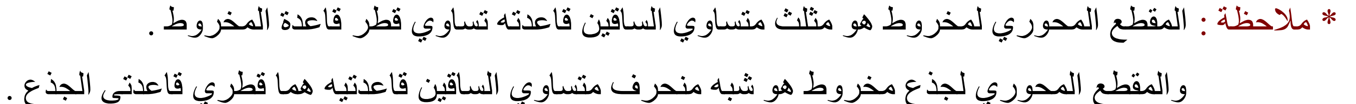

* لاحظ : من تشابه المثلثين القائمين $Po'N'$, PoN نجد $\frac{Po'}{Po} = \frac{PN'}{PN} = \frac{o'N'}{oN}$


9) مولد المخروط : $L^2 = h^2 + R^2$


* لاحظ : من تشابه المثلثين القائمين $Po'N'$, PoN نجد $\frac{Po'}{Po} = \frac{PN'}{PN} = \frac{N'o'}{No}$



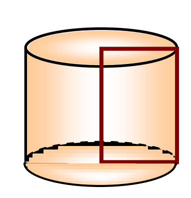
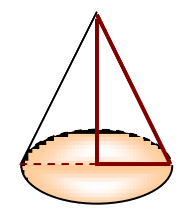
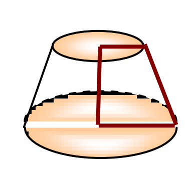
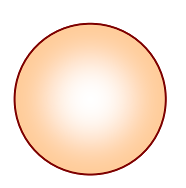

10) مولد جذع المخروط : $L^2 = h^2 + (R - r)^2$
حيث : L – مولد الجذع , h – ارتفاع الجذع .
R – نصف قطر القاعدة الكبرى , r – نصف قطر القاعدة الصغرى .


* ملاحظة : المقطع المحوري لمخروط هو مثلث متساوي الساقين قاعدته تساوي قطر قاعدة المخروط .
والمقطع المحوري لجذع مخروط هو شبه منحرف متساوي الساقين قاعدتيه هما قطري قاعدتي الجذع .

11) مقطع الكرة بمستوٍ يبعد عن مركزها o مسافة L أصغر من نصف قطرها هو دائرة تامة مركزها هو مرتسم o على المستوي ونصف قطرها $r = \sqrt{R^2 - L^2}$ وتدعى دائرة صغرى .

* إن : $R^2 = r^2 + (R - h)^2$ حيث : h ارتفاع القبة الكروية الصغرى , R نصف قطر الكرة .

الدوران

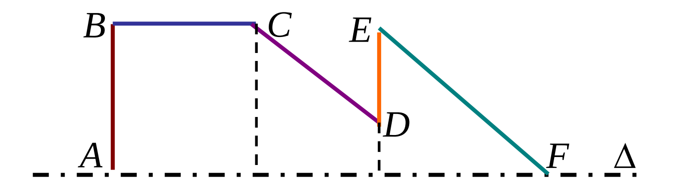
* تنتج الاسطوانة عن دوران مستطيل تام حول أحد أضلاعه دورة كاملة .

* ينتج المخروط عن دوران مثلث قائم حول أحد ضلعيه القائمين دورة كاملة .
أو عن دوران مثلث متساوي الساقين (أو متساوي الأضلاع) حول ارتفاعه النازل من رأسه نصف دورة .

* ينتج جذع المخروط عن دوران شبه منحرف قائم حول ضلعة القائمة (ارتفاعه) دورة كاملة .
أو عن دوران شبه منحرف متساوي الساقين حول ارتفاعه المتوسط لقاعدتيه نصف دورة .

* تنتج الكرة عن دوران نصف دائرة حول قطرها دورة كاملة (أو دوران دائرة نصف دورة حول قطرها) .

* تتولد المنطقة الكروية من دوران قوس دائرة حول قطرها دورة كاملة .



* دوران قطعة مستقيمة [AB] عمودية على محور الدوران وأحد طرفيها يقع عليه تولد سطح دائرة .

* دوران قطعة مستقيمة [BC] توازي محور الدوران تولد سطحا" جانبيا" لإسطوانة .

* دوران قطعة مستقيمة [CD] مائلة على محور الدوران ولا تقطعه تولد سطحا" جانبيا" لجذع مخروط .

* دوران قطعة مستقيمة [DE] عمودية على محور الدوران ولا تقطعه تولد سطح حلقة دائرية .

* دوران قطعة مستقيمة [EF] أحد طرفيها يقع على محور الدوران تولد سطحا" جانبيا" لمخروط .

